PART2　二項定理

例題

(1)　二項定理を用いて，$(a-b)^6$ を展開せよ。

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　二項定理を用いて，$(2x-3y)^5$ を展開せよ。

(2)　$(x^2+3)^8$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ。

第 1 講　PART2 確認問題

1 二項定理を用いて，$(3a-2b)^5$ を展開せよ。

$$(3a-2b)^5=243a^5-\boxed{\text{アイウ}}\,a^4b+1080a^3b^2$$
$$-\boxed{\text{エオカ}}\,a^2b^3+\boxed{\text{キクケ}}\,ab^4-32b^5$$

2 $(3x^2-5)^6$ を展開したときの x^6 の係数を求めよ。

$\boxed{\text{コサシスセソ}}$

PART2　二項定理

例題

(1)　二項定理を用いて，$(a-b)^6$ を展開せよ。

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ。

(1)　$$(a-b)^6 = {}_6\mathrm{C}_0 a^6 + {}_6\mathrm{C}_1 a^5(-b) + {}_6\mathrm{C}_2 a^4(-b)^2 + {}_6\mathrm{C}_3 a^3(-b)^3 + {}_6\mathrm{C}_4 a^2(-b)^4 + {}_6\mathrm{C}_5 a(-b)^5 + {}_6\mathrm{C}_6(-b)^6$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

(2)　$(3-x)^{10}$ の展開式の一般項は　${}_{10}\mathrm{C}_r 3^{10-r}(-x)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r 3^{10-r}(-1)^r x^r$

x^7 は $r=7$ のときの項である。

よって，求める係数は　${}_{10}\mathrm{C}_7 3^3(-1)^7 = 120 \cdot 27 \cdot (-1) = -3240$

練習

(1)　二項定理を用いて，$(2x-3y)^5$ を展開せよ。

(2)　$(x^2+3)^8$ を展開したときの x^8 の係数を求めよ。

(1)　$(2x-3y)^5={}_5\mathrm{C}_0(2x)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2x)^4(-3y)+{}_5\mathrm{C}_2(2x)^3(-3y)^2$

$+{}_5\mathrm{C}_3(2x)^2(-3y)^3+{}_5\mathrm{C}_4(2x)(-3y)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-3y)^5$

$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$

(2)　$(x^2+3)^8$ の展開式の一般項は　${}_8\mathrm{C}_r(x^2)^{8-r}3^r={}_8\mathrm{C}_r3^rx^{2(8-r)}={}_8\mathrm{C}_r3^rx^{16-2r}$

x^8 は $16-2r=8$　つまり　$r=4$ のときの項である。

よって，求める係数は　${}_8\mathrm{C}_4 3^4=70\cdot81=5670$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイウ：810，エオカ：720，キクケ：240

[解説]

$$(3a-2b)^5={}_5C_0(3a)^5+{}_5C_1(3a)^4(-2b)$$
$$+{}_5C_2(3a)^3(-2b)^2+{}_5C_3(3a)^2(-2b)^3$$
$$+{}_5C_4(3a)(-2b)^4+{}_5C_5(-2b)^5 \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{243a^5-810a^4b+1080a^3b^2-720a^2b^3}$$
$$\mathbf{+240ab^4-32b^5}$$

[A]　二項定理

$$(a+b)^n$$
$$={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2$$
$$+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

2 **[正解]** コサシスセソ：-67500

[解説]

$(3x^2-5)^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6C_r(3x^2)^{6-r}(-5)^r \quad \text{[B]}$$
$$={}_6C_r3^{6-r}(-5)^rx^{2(6-r)}$$
$$={}_6C_r3^{6-r}(-5)^rx^{12-2r}$$

x^6 は $12-2r=6$　つまり $r=3$ のときの項である。

よって，求める係数は

$$ {}_6C_3 3^3(-5)^3=20\cdot27\cdot(-125)=\mathbf{-67500}$$

[B]　$(a+b)^n$ の展開式の一般項は

$${}_nC_ra^{n-r}b^r$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$